

KMAPによる微分方程式の解法(1)－係数が定数

(C) H27(2015).5.25 片柳亮二

微分方程式の初期値問題をKMAPで解く方法(その1)について述べる.

[例題 1.1] 微分方程式の解法

次のような微分方程式の初期値問題を解いて, 解の時間応答を求めよ.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0, \quad \text{初期値 } (x)_{t=0} \text{ および } \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$$

(1) 方法 1-1 (伝達関数による方法)

x の 1 階の時間微分を \dot{x} , 2 階微分を \ddot{x} と略記して表す. ここで, x の時間微分は, ラプラス変換すると次のように表される.

$$\dot{x} \Rightarrow sX(s) - x(0)$$

$$\ddot{x} \Rightarrow s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)$$

従って, 微分方程式をラプラス変換すると, 次のように表せる.

$$\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + a\{sX(s) - x(0)\} + bX(s) = 0$$

$$\therefore (s^2 + as + b)X(s) - x(0)s - \{x(0)a + \dot{x}(0)\} = 0$$

これから, $X(s)$ が次のように表される.

$$\therefore X(s) = \frac{x(0)s + \{x(0)a + \dot{x}(0)\}}{s^2 + as + b} \quad (\text{初期条件考慮済み})$$

例として, 係数 $a=4$, $b=3$, 初期値 $x(0)=3$, $\dot{x}(0)=1$ の場合を考える.

このとき, $X(s)$ が次のように与えられる.

$$X(s) = \frac{3s + 13}{s^2 + 4s + 3}$$

さて, $X(s)$ の応答はこの式を伝達関数として, これにインパルス (δ 関数) 入力作用したときの応答である. そこで, 入力を **ステップ入力** $U(s) = 1/s$ に対しては次のように変形できる.

$$X(s) = \frac{(3s+13)s}{s^2+4s+3}U(s) = \frac{3s^2+13s-3s^2-12s-9}{s^2+4s+3}U(s)+3U(s)$$

$$= \frac{s-9}{[1.155, 1.732]}U(s)+3U(s) \quad , \quad (U \text{ はステップ入力})$$

ここで, $[\zeta \ \omega_n] = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ の略記である.

この応答は, KMAP では次のようなインプットデータによって求めることができる.

(このインプットデータの作り方については下記資料を参照ください)

<http://katayanagi.g.dgdg.jp/Introduction%20of%20KMAP%20Transfer%20Function,Y150524.pdf>

EIGE. 微分方程式 (1.1-1). Y150512A. DAT

```

NXP          = 0
tmax (s)     = 10.000
1. NU1-----> 4
  T , U1          0.000      0.000
                  1.000      0.000
                  1.010      1.000
                  60.000     1.000
3. NU3-----> 2
  T , U3          0.000      0.000
                  60.000     0.000
5. NU5-----> 2
  T , U5          0.000      0.000
                  60.000     0.000
*****10*****20*****30*****40*****50*****60*****70*****
<積分数, IRIG, TDEBUG 時間, 補間関数> 3 0 0.0 0
  <Control System Data>      Hi *---GAIN---NCAL*N01*N02*N03*NGO*LNO
1 //
2 Z6=U1*G;                   H 0 0.1000E+01 52 6 1 0 0 0
3 Z7={(S+G3)/[G1G2]}Z6X2X3;  H 0 0.1155E+01 122 7 6 2 0 0
4                               H 0 0.1732E+01 122 0 0 3 0 0
5                               H 0 -0.9000E+01 122 0 0 0 0 0
6 Z8=U1*G;                   H 0 0.3000E+01 52 8 1 0 0 0
7 Z99=Z7+Z8;                 H 0                               35 99 7 8 0 0
8 //-----
9 //安定解析出力に追加する場合
10 //は, 下記に R(6+NXP)~を設定.
11 R6=Z99;                    H 0                               101 6 99 0 0 0
12 //シミュレーション用出力 (Z191~Z200)
13 //(このデータが TES6. DAT に入る)
14 Z191=Z99*G;               H 0 0.1000E+01 53 191 99 0 0 0
15 Z192=Z6*G;               H 0 0.1000E+01 53 192 6 0 0 0
16 //(最後に次の END 文が必要)
17 {Pitch Data END};         H 0                               899 888 887 886 0 0
18 //*-----
19 //*(注 1)状態方程式使用の場合
20 //* Z1, Z3, Z5 : 制御入力設定済
21 //* Z6~(NXP 個) : 状態変数設定済
22 //* Ri は安定解析の出力で下記注意
23 //* R6~(NXP 個) : 状態変数に対応
24 //* R(6+NXP)~Rn: 出力変数の追加
25 //* 解析出力キーは i=4~(R 設定数)

```

```

26  /**
27  /**(注 2)状態方程式使用しない場合
28  /** Zi は全て通常の Z 変数
29  /** R6~出力変数を設定
30  /** 解析出力キーは i=4~(R 設定数)
31  /**$-----
----- (縦系ゲイン最適化 - 探索範囲) -----
探索ゲイン数= 0
重み係数= 0.0000E+00 影響範囲(rad/s)= 0.0000E+00
***** (ゲイン最適化 - 重み関数 W(s)) *****
極の数= 0
零点の数= 0
ゲイン= 0.0000E+00 -----
32  {Control Data END};          H 0          999  0  0  0  0  0
----- (DATA END) -----

```

■ 結果表示 9 : 安定解析結果

```

***** POLES AND ZEROS *****
POLES( 2), EIVMAX= 0.3001D+01
N      REAL      IMAG
1      -0.30014674D+01  0.00000000D+00
2      -0.99945245D+00  0.00000000D+00
ZEROS( 2), II/JJ= 4/ 1, G= 0.3000D+01
N      REAL      IMAG
1      -0.43342938D+01  0.00000000D+00
2      0.00000000D+00   0.00000000D+00

```

■ 結果表示 1 : 安定解析図 (EIGE. 微分方程式(1.1-1).Y150512A.DAT)

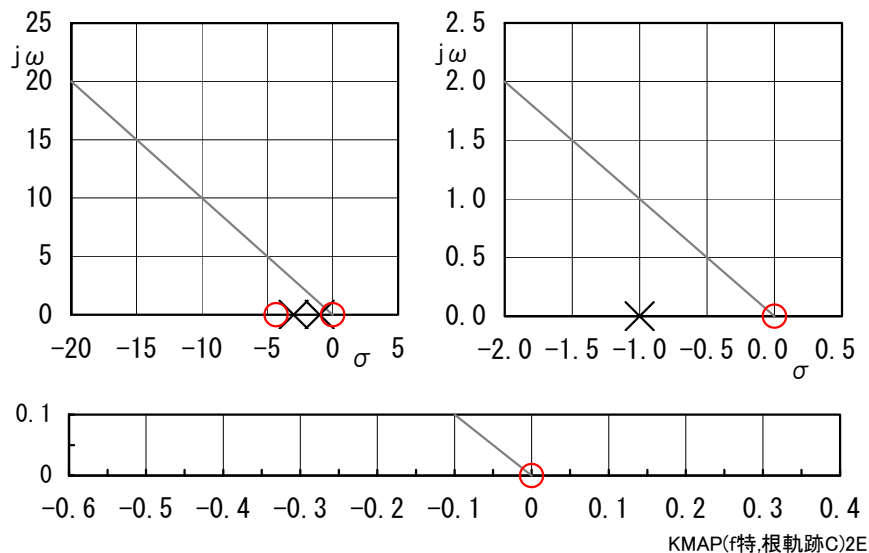


図 1.1-1(a) 極・零点配置

■ 結果表示 7 : シミュレーション図

下記のステップ応答の開始は 1 秒後としている．これは，伝達関数を用いて時間応答を求める際は，伝達関数のフィルタ演算の静定のための初期処理が必要なためである．（この初期処理はもっと短い時間でよいが，切りの良い時間として 1 秒としている）

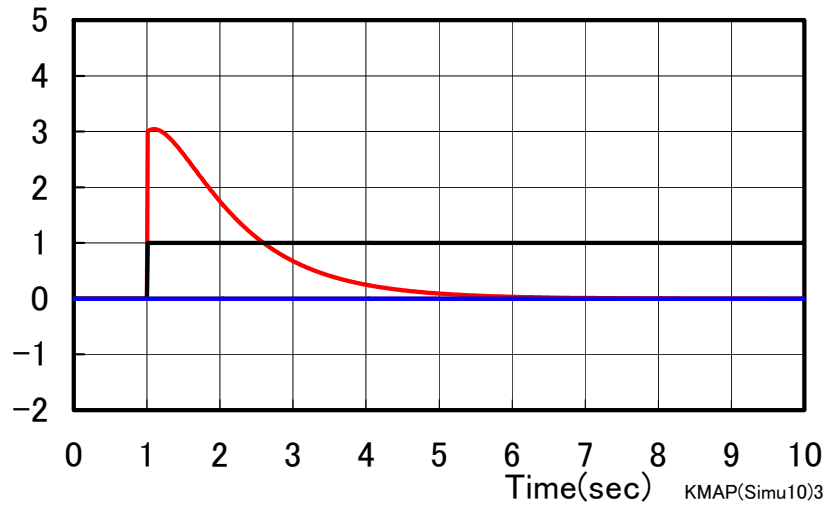


図 1.1-1(b) $x(t)$ の時間応答

(なお，この結果は，芦野隆一，レミ・ヴァイアンクール共著：「MATLAB による微分方程式とラプラス変換」(2000年，共立出版)の173頁のグラフと一致する．ただし，本KMAPによる解法はMATLAB解法とは異なる方法である．)

(2) 方法 1-2 (伝達関数を時間空間の状態方程式に戻して解く方法)

x の応答は、上記 (1) で述べたように、ステップ入力 $U(s)=1/s$ に対して次のように表される。

$$X(s) = \frac{(3s+13)s}{s^2+4s+3} U(s) \quad (\text{初期条件考慮済み})$$

いま、

$$X_1(s) = \frac{1}{s^2+4s+3} U(s)$$

とおくと、 $X(s)$ は次のように変形できる。

$$X(s) = (3s^2+13s)X_1(s)$$

$X_1(s)$ および $X(s)$ の式を時間空間上の微分方程式に戻すと、次のようになる。

$$\ddot{x}_1 + 4\dot{x}_1 + 3x_1 = u, \quad x = 3\ddot{x}_1 + 13\dot{x}_1$$

ここで、

$$x_2 = \dot{x}_1$$

とおくと、次のように変形できる。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_2 - 3x_1 + u \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 3\dot{x}_2 + 13x_2 = -12x_2 - 9x_1 + 3u + 13x_2 \\ &= -9x_1 + x_2 + 3u \end{aligned}$$

すなわち、ステップ入力 u に対する x_1 および x_2 の微分方程式を解き、これらによって x の応答を求めることができる。

上記の微分方程式は、行列表示で表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (\text{状態方程式}) \quad (u \text{ はステップ入力})$$

$$x = -9x_1 + x_2 + 3u \quad (\text{初期条件考慮済み})$$

KMAP によって、この状態方程式を解くために、次の行列のインプットデータを準備する。

$$A_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B_P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(この行列の 0 以外の要素にデータを設定する)(下記インプットデータ参照)
 (このインプットデータの作り方については下記資料を参照ください)

<http://katayanagi.g.dgdg.jp/Introduction%20of%20KMAP%20State%20Equation,Y150524.pdf>

この微分方程式を初期値を考慮して、KMAPにより直接解いてみよう。

EIGE. 微分方程式 (1.1-2). Y150512A. DAT

```

NXP                = 2
tmax(s)           = 10.000
1. NU1-----> 3
  T , U1          0.000      0.000
                  0.010      1.000
                  60.000     1.000
3. NU3-----> 2
  T , U3          0.000      0.000
                  60.000     0.000
5. NU5-----> 2
  T , U5          0.000      0.000
                  60.000     0.000
*****10*****20*****30*****40*****50*****60*****70*****
<積分数, IRIG, TDEBUG 時間, 補間関数> 3 0 0.0 0
  <Control System Data>      Hi *---GAIN---NCAL*N01*N02*N03*NGO*LNO
1 //
2 H12=G;                      H 0  0.1000E+01  11  12  0  0  0  0
3 H21=G;                      H 0 -0.3000E+01  11  21  0  0  0  0
4 H22=G;                      H 0 -0.4000E+01  11  22  0  0  0  0
5 H221=G;                     H 0  0.1000E+01  11 221  0  0  0  0
6 AP(I1, J2)H12;              H 0                      621  1  2  12  0  0
7 AP(I2, J1)H21;              H 0                      621  2  1  21  0  0
8 AP(I2, J2)H22;              H 0                      621  2  2  22  0  0
9 BP(I2, J1)H221;             H 0                      622  2  1 221  0  0
10 Z8=Z6*G;                   H 0 -0.9000E+01  53  8  6  0  0  0
11 Z9=Z7*G;                   H 0  0.1000E+01  53  9  7  0  0  0
12 // (ここで Z6=X1, Z7=X2 です)
13 Z10=Z8+Z9;                  H 0                      35  10  8  9  0  0
14 Z11=U1*G;                   H 0  0.3000E+01  52  11  1  0  0  0
15 Z99=Z10+Z11;                H 0                      35  99  10  11  0  0
16 //
17 //-----
18 //安定解析出力に追加する場合
19 R8=Z99;                      H 0                      101  8  99  0  0  0
20 //シミュレーション用出力 (Z191~Z200)
21 //(このデータが TES6. DAT に入る)
22 Z191=Z99*G;                  H 0  0.1000E+01  53 191  99  0  0  0
23 Z192=U1*G;                   H 0  0.1000E+01  52 192  1  0  0  0
24 //(最後に次の END 文が必要)
25 {Pitch Data END};            H 0                      899 888 887 886  0  0
26 //*-----
27 //*(注 1)状態方程式使用の場合
28 //* Z1, Z3, Z5 : 制御入力設定済
29 //* Z6~(NXP 個) : 状態変数設定済
30 //* Ri は安定解析の出力で下記注意
31 //* R6~(NXP 個) : 状態変数に対応
32 //* R(6+NXP)~Rn: 出力変数の追加
33 //* 解析出力キーは i=4~(R 設定数)
34 //*
```

```

35  /*(注 2)状態方程式使用しない場合
36  /* Zi は全て通常の Z 変数
37  /* R6~出力変数を設定
38  /* 解析出力キーは i=4~(R 設定数)
39  /*$-----
----- (縦系ゲイン最適化 - 探索範囲) -----
探索ゲイン数= 0
重み係数= 0.0000E+00 影響範囲(rad/s)= 0.0000E+00
***** (ゲイン最適化 - 重み関数 W(s)) *****
極の数= 0
零点の数= 0
ゲイン= 0.0000E+00 -----
          初期値 X( 1)= 0.0000E+00
          X( 2)= 0.0000E+00
40  {Control Data END};          H 0          999  0  0  0  0  0
----- (DATA END) -----

```

$t=0$ における極・零点は次のようになる。

■ 結果表示 9 : 安定解析結果

```

***** POLES AND ZEROS *****
POLES( 2), EIVMAX= 0.3000D+01
N      REAL      IMAG
1      -0.3000000D+01  0.0000000D+00
2      -0.1000000D+01  0.0000000D+00
ZEROS( 2), II/JJ= 6/ 1, G= 0.3000D+01
N      REAL      IMAG
1      -0.4333333D+01  0.0000000D+00
2      0.0000000D+00   0.0000000D+00

```

■ 結果表示 1 : 安定解析図 (EIGE. 微分方程式(1.1-2).Y150512A.DAT)

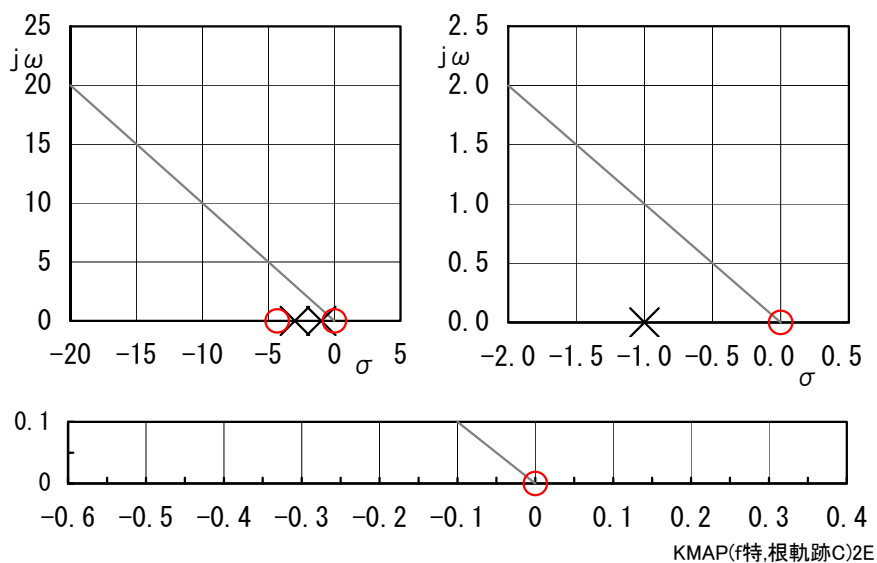
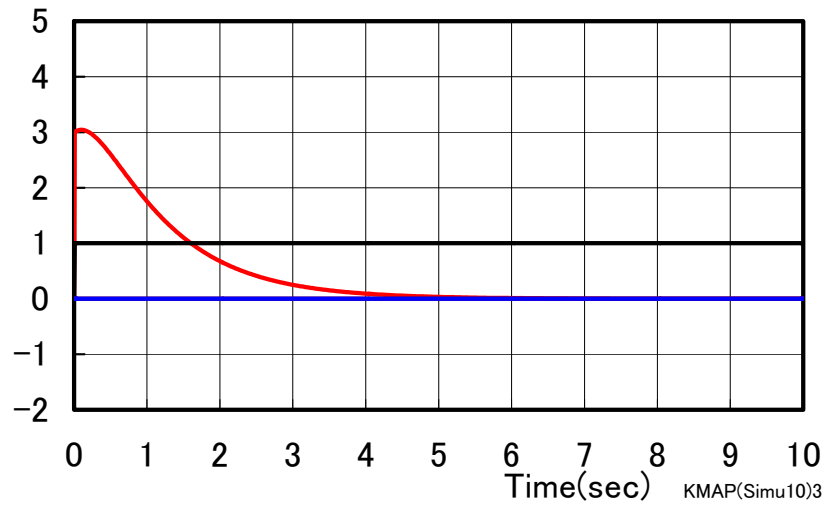


図 1.1-2(a) 極・零点配置

■ 結果表示 7 : シミュレーション図

図 1.1-2(b) $x(t)$ の時間応答

(図 1.1-2(a)および図 1.1-2(b)の結果は、方法 1 と同じ結果である.)


```

3  H21=G;                H 0 -0.3000E+01  11  21  0  0  0  0
4  H22=G;                H 0 -0.4000E+01  11  22  0  0  0  0
5  AP(I1, J2)H12;       H 0                    621  1  2  12  0  0
6  AP(I2, J1)H21;       H 0                    621  2  1  21  0  0
7  AP(I2, J2)H22;       H 0                    621  2  2  22  0  0
8  //
9  //-----
10 //安定解析出力に追加する場合
11 //シミュレーション用出力(Z191~Z200)
12 //(このデータが TES6. DAT に入る)
13 Z191=Z6*G;            H 0  0.1000E+01  53 191  6  0  0  0
14 Z192=U1*G;           H 0  0.1000E+01  52 192  1  0  0  0
15 //(最後に次の END 文が必要)
16 //
17 {Pitch Data END};     H 0                    899 888 887 886  0  0
18 //*-----
19 //*(注1)状態方程式使用の場合
20 //* Z1, Z3, Z5      : 制御入力設定済
21 //* Z6~(NXP 個)    : 状態変数設定済
22 //* Ri は安定解析の出力で下記注意
23 //* R6~(NXP 個)    : 状態変数に対応
24 //* R(6+NXP)~Rn   : 出力変数の追加
25 //* 解析出力キーは i=4~(R 設定数)
26 //*
27 //*(注2)状態方程式使用しない場合
28 //* Zi は全て通常の Z 変数
29 //* R6~出力変数を設定
30 //* 解析出力キーは i=4~(R 設定数)
31 //\$-----
----- (縦系ゲイン最適化 - 探索範囲) -----
探索ゲイン数= 0
重み係数= 0.0000E+00  影響範囲(rad/s)= 0.0000E+00
***** (ゲイン最適化 - 重み関数 W(s)) *****
極の数= 0
零点数= 0
ゲイン= 0.0000E+00 -----
          初期値 X( 1)= 0.3000E+01
          X( 2)= 0.1000E+01
32 {Control Data END};   H 0                    999  0  0  0  0  0
----- (DATA END) -----

```

$t=0$ における極・零点は次のようになる。

■ 結果表示 9 : 安定解析結果

```

***** POLES AND ZEROS *****
POLES( 2), EIVMAX= 0.3000D+01
N      REAL      IMAG
1      -0.30000000D+01  0.00000000D+00
2      -0.10000000D+01  0.00000000D+00
ZEROS( 0), II/JJ= 4/ 1, G= 0.0000D+00
N      REAL      IMAG

```

■ 結果表示 1 : 安定解析図 (EIGE. 微分方程式 (1. 1-3). Y150511A. DAT)

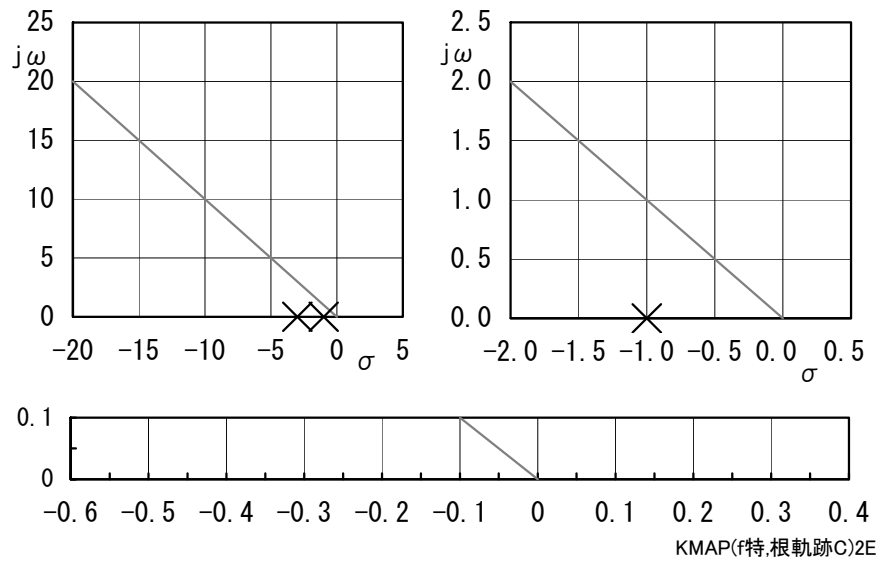


図 1. 1-3 (a) 極・零点配置

■ 結果表示 7 : シミュレーション図

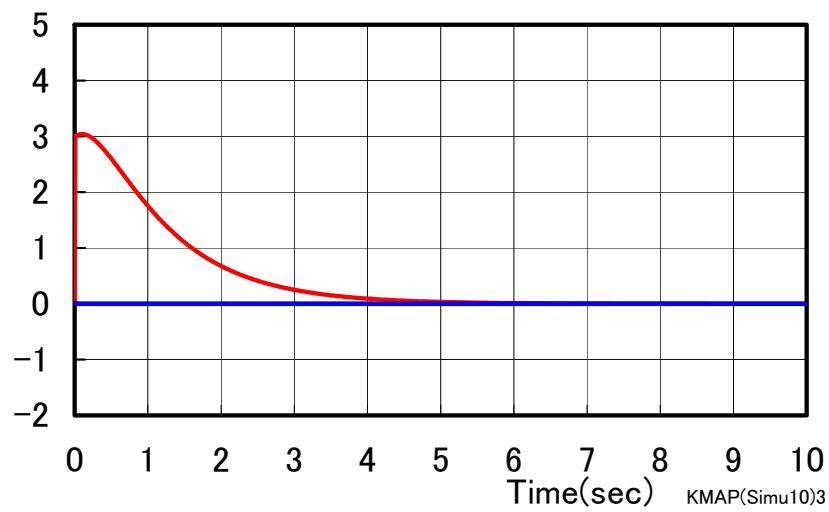


図 1. 1-3 (b) $x(t)$ の時間応答

(図 1. 1-3 (a) および図 1. 1-3 (b) の結果は, 方法 1 および 2 と同じ結果である.)

以上